



哈尔滨工程大学
HARBIN ENGINEERING UNIVERSITY

抓石子游戏中的数学问题

张神星 (合肥工业大学)

哈尔滨工程大学

zhangshenxing@hfut.edu.cn

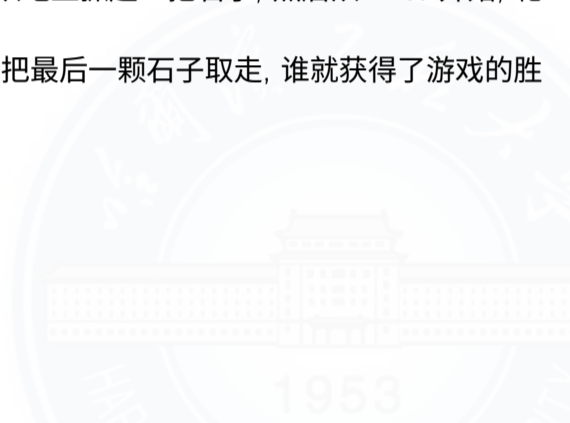
抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.



抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 1 ~ 3 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.



抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.
- 不难知道, 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 Alice 取 x 个之后, Bob 只需要取 $4 - x$ 个, 就可以保证必胜.



抓石子游戏

- 幼儿园里有两个小朋友 Alice 和 Bob, 他们从地上抓起一把石子, 然后从 Alice 开始, 轮流从石子堆中取走石子.
- 每个人每次可以取走 $1 \sim 3$ 个石子, 最终谁把最后一颗石子取走, 谁就获得了游戏的胜利.
- 不难知道, 如果一开始石子的个数是 4 的倍数. 那么每次 Alice 取 x 个之后, Bob 只需要取 $4 - x$ 个, 就可以保证必胜.
- 而如果一开始石子的个数不是 4 的倍数, 那么 Alice 只需要取 $1 \sim 3$ 个石子, 使得剩下的石子个数是 4 的倍数即可获胜.

- 我们将这个游戏记为 $\text{SUB}(S)$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$ 表示每次可以取的石头个数.



胜负数列

- 我们将这个游戏记为 $\text{SUB}(S)$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 那么根据初始石头个数 n 的不同, 我们可以得到一个胜负数列(从 0 开始):

0111 0111 0111 ...

这里 0 表示先手必败, 1 表示先手必胜.

胜负数列

- 我们将这个游戏记为 $\text{SUB}(S)$, 其中 $S = \{1, 2, 3\}$ 表示每次可以取的石头个数.
- 那么根据初始石头个数 n 的不同, 我们可以得到一个**胜负数列**(从 0 开始):

0111 0111 0111 ...

这里 0 表示先手必败, 1 表示先手必胜.

- 事实上, 我们将游戏规则改成**谁不能取谁算输**更为合理, 因为允许取的石子个数的集合 S 可能不包含 1, 这样有时候会剩下石子.

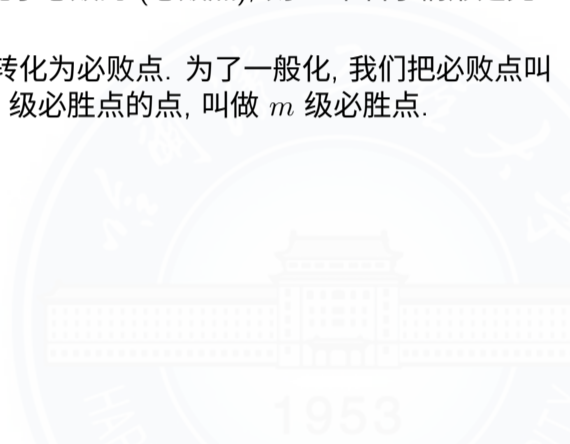
Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).



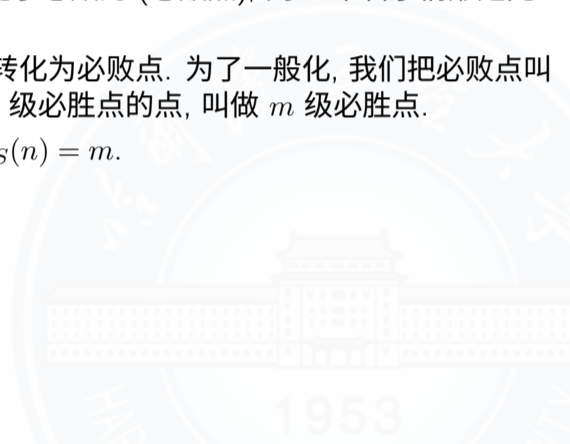
Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m - 1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.



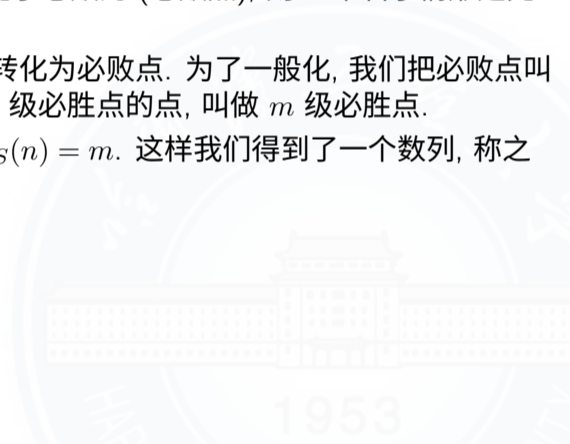
Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m - 1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$.



Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m - 1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $G_S(n) = m$. 这样我们得到了一个数列, 称之为 Sprague-Grundy 数列 (或 Nim 数列),



Sprague-Grundy 数列

- 如果存在 $s \in S$ 使得 $n - s$ 个石子情形是先手必败的 (必败点), 则 n 个石子情形是先手必胜的 (必胜点).
- 而有些情形, 既可以转化为必胜点, 也可以转化为必败点. 为了一般化, 我们把必败点叫做 0 级必胜点, 把可以一步走到 $0 \sim m - 1$ 级必胜点的点, 叫做 m 级必胜点.
- 如果 n 个石子情形是 m 级必胜点, 定义 $\mathcal{G}_S(n) = m$. 这样我们得到了一个数列, 称之为 Sprague-Grundy 数列 (或 Nim 数列), 且

$$\mathcal{G}_S(n) = \text{mex} \{ \mathcal{G}_S(n - s) : s \in S \}.$$

mex 是指不属于后面集合的最小的非负整数 (minimal except).

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;



Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);



Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合) 等等.

不过我们今天只讨论 S 有限的 ^{subtraction game} 一维一堆情形.

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$.

Nim 游戏及其变种

实际上 Nim 游戏 (抓石子游戏) 有相当多的变种, 例如

- 有多个石子堆;
- 有无穷多种取法 (S 无限);
- 高维情形 (n 是向量, S 是向量集合) 等等.

不过我们今天只讨论 S 有限的 ^{subtraction game} 一维一堆情形.

注意到 $\mathcal{G}_{dS}(n) = \mathcal{G}_S(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor)$. 因此我们只需考虑 S 的所有元素公因子为 1 的情形.

通过抽屉原理, 容易说明:



周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 G_S 是 ultimately periodic 最终周期的, 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $G_S(n+p) = G_S(n), \forall n \geq \ell$.



周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 \mathcal{G}_S 是 **最终周期的** (ultimately periodic), 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geq \ell$.

将最小的 p 称为 $(\mathcal{G}_S$ 或 $\text{SUB}(S)$ 的) **周期** (period), 最小的 ℓ 称为 **预周期** (pre-period).

周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 \mathcal{G}_S 是 **最终周期的** (ultimately periodic), 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geq \ell$.

将最小的 p 称为 $(\mathcal{G}_S$ 或 $\text{SUB}(S)$ 的) **周期** (period), 最小的 ℓ 称为 **预周期** (pre-period).
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 \mathcal{G}_S 是 ultimately periodic 最终周期的, 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geq \ell$.

将最小的 p 称为 $(\mathcal{G}_S$ 或 $\text{SUB}(S)$ 的) period 周期, 最小的 ℓ 称为 pre-period 预周期.
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

不难说明, 满足 $\mathcal{G}_S(n) = \mathcal{G}_S(n+p), \ell \leq n \leq \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期.

周期和预周期

通过抽屉原理, 容易说明:

命题

数列 \mathcal{G}_S 是 **最终周期的** (ultimately periodic), 即存在整数 $p \geq 1, \ell \geq 0$ 使得 $\mathcal{G}_S(n+p) = \mathcal{G}_S(n), \forall n \geq \ell$.

将最小的 p 称为 $(\mathcal{G}_S$ 或 $\text{SUB}(S)$ 的) **周期** (period), 最小的 ℓ 称为 **预周期** (pre-period).
我们总将集合 S 中的元素从小到大排列, 即

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}, \quad s_1 < s_2 < \dots < s_k.$$

不难说明, 满足 $\mathcal{G}_S(n) = \mathcal{G}_S(n+p), \ell \leq n \leq \ell + s_k$ 的最小的 p 和 ℓ 就是周期和预周期. 因此对于任意集合 S , 很容易通过计算机来计算它的周期和预周期, 从而得到整个 SG 数列.

$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的.



$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 l 依然还不是完全知道.



$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 l 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.



$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 l 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $G_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\underline{H} = \mathcal{H}\mathcal{H}\cdots$ 表示无穷多个 \mathcal{H} 重复得到的数列.

$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 l 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{H}\dots$ 表示无穷多个 \mathcal{H} 重复得到的数列.
- $1 \in S$ 不含偶数 $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$.

$k \leq 2$ 等情形

当 $k = \#S \leq 2$ 时, p 和 l 都是已知的. 而即使是 $k = 3$ 的情形, p 和 l 依然还不是完全知道. 我们将回顾已知的并给出一些新的结果.

- $\mathcal{G}_{\{1\}} = \underline{01}$. 这里 $\mathcal{H} = \mathcal{H}\mathcal{H}\dots$ 表示无穷多个 \mathcal{H} 重复得到的数列.
- $1 \in S$ 不含偶数 $\iff \mathcal{G}_S = \underline{01}$.
- 设 $S = \{a, c = at + r\}, 0 \leq r < a$, 则

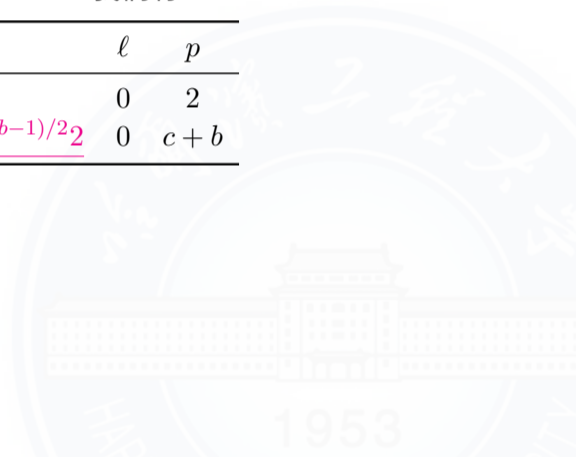
$$\mathcal{G}_S = \begin{cases} \underline{(0^a 1^a)^{t/2} 0^r 2^{a-r} 1^r}, & 2 \mid t; \\ \underline{(0^a 1^a)^{(t+1)/2} 2^r}, & 2 \nmid t, \end{cases} \quad l = 0, p = c + a \text{ 或 } 2a.$$

这里 $\mathcal{H}^t = \mathcal{H}\dots\mathcal{H}$ 表示 t 个 \mathcal{H} 重复得到的数列.

$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, b, c\}$, $2 \nmid b$. 注意到 $G_{\{1, b\}} = \mathcal{H}$, $\mathcal{H} = 01$. 我们有

c	G_S	ℓ	p
奇数	\mathcal{H}	0	2
偶数	$\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2$	0	$c + b$



$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, b, c\}$, $2 \nmid b$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,b\}} = \underline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = 01$. 我们有

c	\mathcal{G}_S	ℓ	p
奇数	<u>\mathcal{H}</u>	0	2
偶数	<u>$\mathcal{H}^{c/2}(23)^{(b-1)/2}2$</u>	0	$c + b$

- 设 $S = \{1, 2, 3t + r\}$, $0 \leq r < 3$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,2\}} = \underline{\mathcal{H}}$, $\mathcal{H} = 012$. 我们有

r	\mathcal{G}_S	ℓ	p
0	<u>$(012)^t 3$</u>	0	$c + 1$
1, 2	<u>012</u>	0	3

$S = \{1, b, c\}$ 的简单情形

- 设 $S = \{1, 4, c = 5t + r\}, 0 \leq r < 5$. 注意到 $\mathcal{G}_{\{1,4\}} = \mathcal{H}, \mathcal{H} = 01012$. 我们有

r, c	\mathcal{G}_S	ℓ	p
$r = 0, c = 5$	$\mathcal{H}323$	0	8
$r = 0, c > 5$	$\mathcal{H}^t 323013\mathcal{H}^{t-1}012012$	$c + 6$	$c + 1$
$r = 1, 4$	\mathcal{H}	0	5
$r = 2$	$\mathcal{H}^t 012$	0	$c + 1$
$r = 3$	$\mathcal{H}^{t+1} 32$	0	$c + 4$

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b + 1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

(1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

- (1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.
- (2) 若 $3 \leq r \leq b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b + 1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

- (1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.
- (2) 若 $3 \leq r \leq b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.
- (3) 若 $r = b - 2$, 则 $\ell = 0, p = c + 1$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

- (1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.
- (2) 若 $3 \leq r \leq b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.
- (3) 若 $r = b - 2$, 则 $\ell = 0, p = c + 1$.
- (4) 若 $c = b + 1$, 则 $\ell = 0, p = 2b$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

- (1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.
- (2) 若 $3 \leq r \leq b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.
- (3) 若 $r = b - 2$, 则 $\ell = 0, p = c + 1$.
- (4) 若 $c = b + 1$, 则 $\ell = 0, p = 2b$.
- (5) 若 $c > b + 1$, $0 \leq r \leq b - 4$ 是偶数且 $t + r/2 \geq k$, 则 $\ell = ((b - r)/2 - 1)(c + b + 2) - b, p = c + 1$.

$S = \{1, b, c\}$ 的复杂情形

命题

设 $S = \{1, b, c = t(b+1) + r\}$, $b = 2k \geq 6$, $0 \leq r \leq b$.

- (1) 若 $r = 1, b$, 则 $\ell = 0, p = b + 1$.
- (2) 若 $3 \leq r \leq b - 1$ 是奇数, 则 $\ell = 0, p = c + b$.
- (3) 若 $r = b - 2$, 则 $\ell = 0, p = c + 1$.
- (4) 若 $c = b + 1$, 则 $\ell = 0, p = 2b$.
- (5) 若 $c > b + 1$, $0 \leq r \leq b - 4$ 是偶数且 $t + r/2 \geq k$, 则 $\ell = ((b - r)/2 - 1)(c + b + 2) - b, p = c + 1$.
- (6) 若 $c > b + 1$, $0 \leq r \leq b - 4$ 是偶数且 $t + r/2 \leq k - 1$, 则 $\ell = t(c + b + 2) - b$. 若 $t + r/2 < k - 1$, 则 $p = c + b$; 若 $t + r/2 = k - 1$, 则 $p = b - 1$.

我们发现, 对于集合 $S = \{1, b, c\}$, p 和 ℓ 的形式与 c 模 $\{1, b\}$ 的周期的同余类有关. 对于每一个同余类而言, p 和 ℓ 是 c 的一次函数.

更多的例子

命题

更多的例子

命题

(1) 设 $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}, 0 \leq r < 3a$, 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

更多的例子

命题

(1) 设 $S = \{a, 2a, c = 3at + r\}$, $0 \leq r < 3a$, 则

$$\ell = \begin{cases} c + a - r, & 0 < r < a; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p = \begin{cases} 3a/2, & r = a/2; \\ 3a, & a/2 < r \leq 2a; \\ c + a, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

(2) 设 $S = \{a, a + 1, \dots, b - 1, b, c = t(a + b) + r\}$, $0 \leq r < a + b$, 则

$$\ell = 0, \quad p = \begin{cases} a + b, & a \leq r \leq b; \\ c + a, & r = 0 \text{ 或 } r > b; \\ c + b, & 0 < r < a. \end{cases}$$

例

设 $S = \{2, 3, 5, 7\}$, 则 $G_S = 0^2 1^2 2^2 3^2 4$ 周期为 9. 对于 $11 \leq c \leq 500$, $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期为

$$l_c = \begin{cases} 2c - 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ c + 5, & c \equiv 10 \pmod{18}; \\ 0, & \text{其它情形,} \end{cases} \quad p_c = \begin{cases} c + 2, & c \equiv 0, 8, 9, 10, 17 \pmod{18}; \\ 4, & c \equiv 1 \pmod{18}; \\ 9, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

主要猜想结论

根据这些结论, 我们提出如下猜想:



主要猜想结论

根据这些结论, 我们提出如下猜想:

猜想

固定集合 S . 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$, 使得当 $c \geq N$ 且 $c \equiv r \pmod{q}$ 时, $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

主要猜想结论

根据这些结论, 我们提出如下猜想:

猜想

固定集合 S . 存在正整数 q, N 以及 $\alpha_r, \beta_r, \lambda_r, \mu_r, 0 \leq r < q$, 使得当 $c \geq N$ 且 $c \equiv r \pmod{q}$ 时, $\text{SUB}(S \cup \{c\})$ 的预周期和周期分别是 $\alpha_r c + \beta_r$ 和 $\lambda_r c + \mu_r$.

定理

上述猜想在如下情形成立:

- (1) $1 \in S$ 且 S 所有元素均为奇数;
- (2) $S = \{1, b\}$;
- (3) $S = \{a, 2a\}$;
- (4) $S = \{a, a + 1, \dots, b - 1, b\}$.

应用：最终二分数列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 数列.



应用：最终二分数列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 数列. 如果 G_S 的周期为 2, 称 $\text{SUB}(S)$

ultimately bipartite
是最终二分的.



应用：最终二分数列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 数列. 如果 G_S 的周期为 2, 称 $\text{SUB}(S)$ ultimately bipartite 是**最终二分**的. 可以证明如果 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.



应用：最终二分数列

这个猜想可以指导我们寻找特定周期的 SG 数列. 如果 G_S 的周期为 2, 称 $\text{SUB}(S)$ ultimately bipartite 是**最终二分**的. 可以证明如果 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的, 则 S 不含偶数.

例

设 $a \geq 3$ 是奇数. 如果 S 是如下情形之一:

- $S = \{3, 5, 9, \dots, 2^a + 1\}$;
- $S = \{3, 5, 2^a + 1\}$;
- $S = \{a, a + 2, 2a + 3\}$;
- $S = \{a, 2a + 1, 3a\}$,

则 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分数列

根据上面的例子和猜想的启发, 我们发现了如下三元最终二分 $\text{SUB}(S)$.



应用：最终二分数列

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\text{SUB}(S)$ 。

定理

设 $a \geq 3$ 是奇数, $t \geq 1$. 如果 S 是如下情形之一:

- (1) $S = \{a, a + 2, (2a + 2)t + 1\}$;
- (2) $S = \{a, 2a + 1, (3a + 1)t - 1\}$;
- (3) $S = \{a, 2a - 1, (3a - 1)t + a - 2\}$,

则 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的.

应用：最终二分数列

根据上面的例子和猜想的启发，我们发现了如下三元最终二分 $\text{SUB}(S)$ 。

定理

设 $a \geq 3$ 是奇数， $t \geq 1$ 。如果 S 是如下情形之一：

- (1) $S = \{a, a + 2, (2a + 2)t + 1\}$;
- (2) $S = \{a, 2a + 1, (3a + 1)t - 1\}$;
- (3) $S = \{a, 2a - 1, (3a - 1)t + a - 2\}$,

则 $\text{SUB}(S)$ 是最终二分的。

对于四元情形，我们通过计算发现了当 $3 \leq a \leq 25, c < 500$ 且 $c \not\equiv \pm 1 \pmod{a}$ 时， $\text{SUB}(\{a, 2a + 1, 3a, c\})$ 是最终二分的。

谢谢!

